CAPÍTULO 5 - Algumas distribuições de variáveis aleatórias discretas e contínuas

(parte considerada incompleta visto o volume de informações importantes não incluídas, além de exercícios. Tais informações e exercícios serão acrescentadas posteriormente.

Distibuições de variáveis aleatórias discretas:

Será feita uma discussão sobre algumas distribuições de probabilidades discretas. Tais distribuições partem da pressuposição de certas hipóteses bem definidas. Como diversas situações reais muitas vezes se aproximam dessas hipóteses, esses modelos são úteis no estudo de tais situações, daí a sua importância. Um cuidado muito grande deve ser tomado ao se escolher uma distribuição de probabilidade que descreve corretamente as observações geradas por um experimento.

Primeiramente analisaremos as distribuições discretas de probabilidades mais importantes e que descrevem as v.a. comumente encontradas na prática. Por último analisaremos algumas distribuições de v.a. contínuas de importância similar.

Uniforme

É a mais simples de todas as distribuições discretas de probabilidade. É aquela na qual a v.a. assume todos os seus valores com a mesma probabilidade. Uma tal disribuição é chamada **distribuição uniforme**.

A distribuição discreta uniforme é dada por:

$$P(x,k) = 1/k = P(X = x)$$

onde x é um dos possíveis valores da v.a. X.

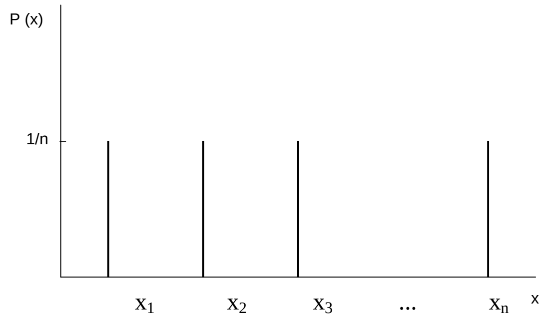
Utilizamos aqui P(x,k) ao invés de p(x) para indicar que a distribuição uniforme depende do parâmetro k.

Este é o caso mais simples de v.a. discreta, onde cada possível valor ocorre com a mesma probabilidade.

Definição: A variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tem distribuição uniforme, se e só se,

$$P(X = x_i) = P(x_i) = p = \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } i = 1, 2, ..., n.$$

i) Gráfico



ii) Tabela

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
$P(x_i)$	1/n	1/n	1/n	1/n	...	1/n

Exemplos:
1) Seja E: lançamento de um dado não-viciado.
O espaço amostral é: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6)
Cada ponto de S tem probabilidade do ocorrer igual a 1/6.

Tabela:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Binomial *(uma extensão da distribuição de Bernoulli)*

Suponha um experimento cujos resultados podem ser classificados em "sucessos" e "fracassos". Se fizermos X=1 quando obtivermos um sucesso e X=0 quando um fracasso, então a função de probabilidade de X será dada por: P(X=1)=p e P(X=0) = 1-p (sendo p a probabilidade de "sucesso"). Nesse caso, dizemos que a v.a. X tem distribuição de Bernoulli.

A distribuição Binomial advém da distribução de Bernoulli quando repetimos um ensaio (algumas vezes referido como "provas") de Bernoulli n vezes.

Em resumo, teríamos o seguinte:

a) São realizados n ensaios independentes e do mesmo tipo;

b) Cada ensaio admite dois resultados: "sucesso" ou "fracasso";

c) A probabilidade de sucesso em cada prova é p (valor constante) e, por conseguinte, a probabilidade de fracasso será q = 1 – p, também constante.

Ao associarmos uma v.a. X igual ao <u>número de sucessos</u> nessas n provas (ensaios), X poderá assumir os valores 0, 1, 2, …, n.

A distribuição de probabilidades de uma v.a. que tem distribuição binomial é dada por

$$P(x;n,p) = \begin{cases} C_n^x\, p^x q^{n-x} & x = 0,1,2,...,n;\ 0 \le q = 1 - p \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

exemplos:

1. Se 20% dos parafusos produzidos por uma máquina são defeituosos, determinar a probabilidade de, entre 4 parafusos escolhidos ao acaso, no máximo 2 deles serem defeituosos. (R: 0,9728)

2. Um fabricante de certas peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá no máximo 2 itens defeituosos. Se a caixa contém 20 peças e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 2 por cento de itens defeituosos, qual a probabilidade de que uma caixa de suas peças não vá satisfazer a garantia? (R: 0,0071)

3. Sabe-se que os discos produzidos por certa companhia serão defeituosos com probabilidade de 1% independentemente de outros discos. A companhia vende os discos em pacotes de 10 unidades e oferece uma garantia (de retorno em dinheiro) de que no máximo 1 de cada 10 discos é defeituoso.

a) Qual é a proporção de pacotes retornados? R.: ≈ 0,5%

b) Se alguém compra 3 pacotes, qual é a probabilidade de exatamente um deles ser retornado? R.: 0,015

4. Entre 2.000 famílias com 4 crianças cada uma, quantas se esperaria que tivessem:
a) Pelo menos um menino? (R: 1875)

b) Exatamente dois meninos? (R: 750).

obs.:

a) quando o número de ensaios n for grande ($n \geq 50$ e $np < 5$) pode-se usar a aproximação pela distribuição de Poisson (a ser apresentada posteriormente) com média $\mu = \lambda = np$;

b) de forma similar podemos usar a aproximação pela distribuição normal (a ser apresentada posteriormente) com $\mu = np$ e $\sigma^2 = npq$, no caso em que np e nq são maiores que 5;

c) a distribuição Hypergeométrica (a ser apresentada posteriormente) se reduz à distribuição Binomial se N, o número de elementos na população Hipergeométrica, tende ao infinito ou é grande comparado com n, o tamanho da amostra. Nesse caso, a ocorrência de reposição ou não torna-se indistinguível.

d) Se $X \sim B(n; p)$ então $E(X) = np$, e $V(X) = npq$.

Multinomial

Essa distribuição é uma extensão da distribuição Binomial. O experimento binomial se transforma em um experimento multinomial se em cada tentativa (prova ou ensaio) tivermos mais de dois possíveis resultados de interesse. Como exemplo considere o caso de termos 3 possíveis resultados: classificação de um produto em defeituoso, aceitável e recuperável; ou de acidentes de trânsito em leves, graves ou fatais.

Se numa dada tentativa podem ocorrer k resultados, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, com probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$, então a distribuição de propabilidades das v.a.d. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ número de ocorrências para $A_1, A_2, \ldots, A_k$ em n tentativas independentes é:

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_k;p_1,p_2,\ldots,p_k;n) = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!} p_1^{x1} p_2^{x2} \ldots p_k^{xk}$$

onde $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ e $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

exemplo:

Uma peça é considerada "boa" (tipo 1) se uma de suas dimensões L está entre l_1 e l_2; "recuperável" (tipo 2) se $L > l_2$ e "perdida" (tipo 3) se $L < l_1$. Numa caixa temos 5 peças do tipo 1, 4 do tipo 2 e 3 do tipo 3. Retira-se, aleatoriamente, uma peça dessa caixa e mede-se sua dimensão com o auxílio de um aparelho de precisão, após o que devolve-se a peça dentro da caixa. Seis operações dessa natureza são realizadas. Qual é a probabilidade de entre as seis peças observadas obtermos o seguinte resultado: 3 peças do tipo 1, 2 do tipo 2, e 1 do tipo 3?

solução:

$p_1 = 5/12$; $p_2 = 4/12$; $p_3 = 3/12$

$$P(x_1,x_2,x_3) = \frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184} = 0,1206$$

obs.:

a) quando k = 2 temos a distribuição binomial

b) $E(X_i) = np_i$; $V(X_i) = np_iq_i$

Poisson

Em muitos casos conhecemos o número de sucessos, porém o número de fracassos ou o número total de provas seria difícil de ser determinado, ou muitas vezes, não faria nenhum sentido prático. Por exemplo, o número de descargas elétricas num dia de chuva normal. Podemos, num determinado espaço de tempo determinar o número de descargas elétricas ocorridas, porém, o número de descargas elétricas que deixaram de ocorrer não poderá ser determinado. Da mesma forma, o número de trincas por unidade de área numa peça de concreto. Podemos determinar quantas trincas ocorreram, porém não saberemos contar quantas trincas não ocorreram.

Este tipo de distribuição é útil para descrever as probabilidades do nº de ocorrências num campo ou intervalo contínuo (em geral tempo ou espaço). Eis alguns exemplos de variáveis que podem ter como modelo a distribuição de Poisson:
- nº de defeitos por cm^2
- nº de acidentes por dia
- nº anual de suicídios
- nº de chamadas erradas por hora, num circuito telefônico, etc.

Note-se que a unidade de medida (tempo, área, etc) é contínua mas a variável aleatória (nº de ocorrências) é discreta.

A distribuição de Poisson é utilizada quando o nº de observações de um experimento aleatório é muito grande (ex: $N \geq 50$) e a probabilidade de sucesso é muito pequena (ex: $p \leq 0{,}1$) e o termo Np permanece constante. Daí ser conhecida, classicamente, como a lei dos fenômenos raros.

A distribuição de Poisson fica completamente caracterizada por um único parâmetro, a média do processo, pois na distribuição de Poisson a média é igual a variância, ou seja, $E(X) = V(X) = \lambda$ (ou algumas vezes representado por μ, ou m)

Sabendo-se que uma v.a. tem resultados distribuídos segundo Poisson e conhecendo o nº médio de ocorrências por unidade de medida, podemos determinar a probabilidade de qualquer dos resultados possíveis nos intervalos para os quais desejamos.

A distribuição de Poisson é uma forma limite da distribuição binomial, quando N tende a infinito e p tende a zero.

i) Função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\,, \qquad \text{em que:}$$

X = v.a.d. representando o número de sucessos;
x = um particular valor de X;
e = base do logarítmo neperiano ($e \cong 2{,}718$)
λ = média da distribuição no intervalo de tempo ou medida considerado. Média esta sempre positiva.

exemplos:

1. Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão.

a) Qual a probabilidade de que uma página contenha pelo menos 3 erros de impressão? (R: $\cong 0{,}0803$).

b)Estime o número provável de páginas por livro que não contêm erros de impressão. (R: ≅ 294)

2. Numa indústria, há uma média de 3 acidentes por mês.

a) Qual a probabilidade de ocorrerem 2 acidentes no próximo mês? (R: ≅ 22,4%).

b) Qual a probabilidade de ocorrerem 10 acidentes nos próximos 6 meses? (R: ≅ 0,015)

obs.:

Geométrica

Numa sequência de provas de Bernoulli independentes, o número de "falhas" antes do acontecimento do primeiro "sucesso" tem um distribuição Geométrica com parâmetro p.

Ao invés de ser formulada como $P(x;p) = pq^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, onde X é o número de "falhas" antes de um "sucesso" , a distribuição Geométrica pode ser expressa como $P(x;p) = pq^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$, quando, nesse caso, X será o número de realizações até o primeiro "sucesso" (inclusive).

exemplo:

1) Suponha-se que o custo de realização de um experimento seja US$1000. Se o experimento falhar, ocorrerá um custo adicional de US$300 em virtude de serem necessárias algumas alterações antes que a próxima tentativa seja executada. Se a probabilidade de sucesso em uma tentativa qualquer for 0,2 (se as provas forem independentes), e se os experimentos continuarem até que o primeiro resultado frutuoso seja alcançado, qual será o custo esperado do procedimento completo? R.: US$6200.
2) Em determinada localidade, a probabilidade da ocorrência de uma tormenta em algum dia durante o verão (nos meses de dezembro a janeiro) é igual a 0,1. Admitindo independência de um dia para outro, qual é a probabilidade da ocorrência da primeira tormenta da estação de verão no dia 3 de janeiro? R.: 0,003.
3) Se a probabilidade de que um certo ensaio dê reação "positiva" for igual a 0,4, qual será a probabilidade de que menos de 5 reações "negativas" ocorram antes da primeira positiva? R.: 0,92

obs.:

a) Suponha que exista uma longa sequência de "falhas" numa série de provas de Bernoulli independentes com p=0,5. Contrário ao pensamento intuitivo de alguns jogadores, isto não tem efeito algum nos resultados futuros. Essa propriedade é chamada de falta de memória da distribuição.

b) As frequências dessa distribuição sempre diminuem numa progressão geométrica à medida que o valor de X aumenta.

c) Essa distribuição é frequentemente usada em modelos meteorológicos de ciclos do tempo.

Binomial negativa

É também conhecida como distribuição de Pascal. Se ensaios de Bernoulli independentes (p constante) são repetidos X vezes até um número fixo de "sucessos" (digamos r) tenha ocorrido, X terá distribuição Binomial Negativa. Essa distribuição pode ser considerada como a soma de v.a. $X_1 + X_2 + \ldots + X_r$ cada uma com a mesma distribuição Geométrica.

Consideremos um experimento no qual as propriedades são as mesmas que aquelas enumeradas para o experimento binomial, com exceção de que as tentativas serão repetidas até que um número fixo de sucessos venha a ocorrer. Portanto em vez de achar a probabilidade de x sucessos em n tentativas, onde n é fixo, estamos interessados na probabilidade de que o k-ésimo sucesso ocorra na x-ésima tentativa. Esse tipo de esperimento é chamado experimento binomial negativo. O número de tentativas X para produzir k sucessos em um experimento binomial negativo é chamado uma v.a.d. binomial negativa.

Sua função de probabilidade é:

$$P(x; k,p) = \begin{cases} C_{x-1}^{k-1}\, p^k q^{x-k} & x = k, k+1, k+2, \ldots;\ 0 \le q = 1-p \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

exemplo:

1) No arremesso de uma moeda honesta, qual seria a probabilidade de ocorrer a segunda "cara" no quarto arremesso? R.: 0,1875
2) A probabilidade de que um experimento seja bem sucedido é 0,8. Se o experimento for repetido até que quatro resultados bem sucedidos tenham ocorrido, qual será o número esperado de repetições necessárias? R.: 5.

obs.:

a) Essa distribuição encontra aplicação em estudos de acidentes, como uma substituta para a distribuição de Poisson quando requerimentos de independência não são satisfeitos.
b) Também usada para descrever gastos e demanda de consumidores por produtos adquiridos com certa frequência.
c) Comparando as distribuições Binomial e Binomial Negativa temos: em ambos os casos estamos tratando com provas repetidas de Bernoulli. A distribuição Binomial surge quando lidamos com números fixados (digamos n) dessas provas e estaremos interessados no número de sucessos que venha a ocorrer. A distribuição Binomial Negativa é encontrada quando nós pré-fixamos o número de sucessos a ser obtido e então registramos o número de provas de Bernoulli necessárias.

Hipergeométrica

Em geral podemos estar interessados na probabilidade de selecionar x sucessos de k elementos rotulados como sucessos e n-x falhas de N-k elementos rotulados como falhas ou defeitos quando uma amostra aleatória de tamanho n é retirada de uma população de N elementos. Esse é chamado um experimento hipergeométrico. Propriedades:

a) uma amostra aleatória de tamanho n é tirada de uma população de tamanho N sem reposição;

b) k dos N elementos podem ser classificados como sucessos e N-k são classificados como fracasso (ou falhas).

O númreo x de sucessos em um experimento hipergeométrico é chamada v.a. hipergeomérica.

A distribuição de probabilidade de uma v.a. hipergeométrica X, número de sucessos em uma a.a. de tamanho n selecionada de N elementos sem reposição entre os quais k são rotulados sucessos e N-k rotulados como fracasso, é:

$$P(X = x) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \text{ onde } x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

exemplo:

1) Uma firma comprou várias caixas contendo cada caixa 15 lâmpadas. A mesma decidiu fazer uma inspeção por amostragem sem reposição analisando 5 lâmpadas de cada caixa e aceitando a caixa caso se encontre duas ou menos defeituosas. Calcule a probabilidade de se aceitar uma caixa sabendo que a qualidade do produto é definida por 20% de defeituosos. R.: ≈ 0,978.
2) Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspetor escolhe 5 desses motores e os inspeciona. Se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado. Se um ou mais forem verificados defeituosos, todos os motores da remessa são inspecionados. Suponha que existam, de fato, três motores defeituosos no lote. Qual é a probabilidade de que a inspeção de todos os motores desse lote seja necessária? R.: 0,28.
3) Considere o seguinte jogo de loteria: existem 100 números (de 1 a 100). O apostador pode selecionar 50 números para apostar. 20 números (do total de 100) serão sorteados. Calcule a probabilidade do apostador acertar todos os 20 números do sorteio.

obs.:

a) uma extensão da distribuição hipergeométrica: se N elementos podem ser repartidos em k grupos A_1, A_2, …, A_k com a_1, a_2, …, a_k elementos respectivamente, então a distribuição de probabilidade das v.a.d. X_1, X_2, …, X_k representando o número de elementos selecionados de A_1, A_2, …, A_k em uma amostra aleatória de tamanho n (retirada sem reposição de elementos) é:

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_k;\ a_1,a_2,\ldots,a_k,\ N,\ n) = \frac{\binom{a1}{x1}\binom{a2}{x2}\cdots\binom{ak}{xk}}{\binom{N}{n}}$$

com $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = N$

b) uma característica importante dessa distribuição é que ela se refere a amostragem de uma população sem reposição do elemento selecionado;

c) essa distribuição pode ser aproximada pela Binomial com parâmetros n e p, onde p é calculado por k/N, se k/N ≤ 0,1;

d) já que a distribuição binomial pode ser aproximada pelas distribuições de Poisson e Normal, também existe a correspondente aproximação pela Poisson e Normal para a distribuição Hipergeométrica, quando n é grande, ≥ 50, e k/N é pequeno, <

0,1, no caso da Poisson; e quando n é grande e k/N não é pequeno, ≈ 0,5, no caso da Normal.

e) Admita-se que X tenha distribuição Hipergeométrica. Se fizermos p = k/N, q = 1-p. Assim, E(X) = np; V(X) = npq[(N-n)/N-1)].

f) Aplicações em controle de qualidade industrial

g) Aplicações na estimação do tamanho de populações de animais a partir de dados de “captura-recaptura”.

Distribuições de variáveis aleatórias contínuas

Uniforme

Também conhecida como distribuição Retangular. Uma v.a. X é dita uniformemente distribuida no intervalo [a, b] se sua fdp for dada por

$$f(x) = 1/(b-a) \text{ se } x \in [a, b], \text{ e } f(x) = 0 \text{ se } x \notin [a, b].$$

exemplo:

1) Trens urbanos chegam a uma estação em intervalos de 15 minutos começando às 7 da manhã. Se o horário de chegada de um passageiro nessa estação está uniformemente distribuida entre 7 e 7:30, encontre a probabilidade que ele espere:
   a) menos que 5 minutos por um trem; R.: 1/3
   b) pelo menos 12 minutos por um trem. R.: 1/5

2) Prove que, se X é uniformemente distribuida em [a, b], então E(X)=(a+b)/2 e V(X)=[(b-a)^2]/12.

3) Uma máquina de encher copos de de refrigerante sempre despeja nos copos uma quantidade de bebida entre 270 e 300 ml. Assumindo que X = volume de refrigerante seja uma v.a. uniformemente distribuida, determinar:
   a) A probabilidade de que em um copo sejam despejados mais de 290 ml de refrigerante;
   b) A probabilidade de ocorrer um copo com menos de 275 ml de refrigerante;
   c) O volume esperado em um copo qualquer;
   d) A variância do volume esperado em um copo qualquer.

4) A corrente em um semicondutor diodo é frequentemente medida pela equação (de Shockley): $I = I_0(e^{aV} - 1)$, onde V é a voltagem passando pelo diodo, I_0 é a corrente contrária, a é uma constante, e I é a corrente resultante no diodo. Encontre a corrente resultante no diodo esperada se a = 5, $I_0 = 10^{-6}$ e V é uniformemente distribuida no intervalo (1, 3). R.: ≅ 0,3269

obs.:

a) Um valor de uma distribuição uniforme (0, 1) é chamado um “número aleatório”. Tem inúmeras aplicações em simulações e montagem de experimentos.

Exponencial

A v.a.c. X terá distribuição exponencial se sua fdp, para algum parâmetro λ > 0, for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & para \quad x \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Essa distribuição desempenha importante papel na descrição de uma grande classe de fenômenos, particularmente nos assuntos da teoria d confiabilidade.

Tem como principal característica a propriedade de não possuir memória. Isso significa que o tempo de vida futuro (t) de algum objeto tem a mesma distribuição, independente do tempo de vida passada (s) desse objeto, ou seja, para quaisquer s, t > 0, P(X > s + t | X > s) = P(X > t).

exemplo:

1) Mostre que $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-x\lambda}$, para x > 0
2) Mostre que, para quaisquer s, t > 0, P(X > s + t | X > s) = P(X > t)
3) Suponha que o numero de kilometros que um carro possa trafegar antes da sua bateria estragar tenha distribuição exponencial com um valor médio de 10000 kilometros. Se uma pessoa deseja realizar uma viagem de 5000 km, qual é a probabilidade de que essa pessoa possa terminar a viagem sem precisar trocar a bateria? (obs.: assuma ser a bateria nova no início da viagem). R.: $\cong$ 0,604.
4) A vida média de um satélite é 4 anos, seguindo o modelo exponencial. Seja T a variável definindo o tempo de vida do satélite. Calcule:
   a) P(T > 4). R.: 0,3678
   b) $P(5 \leq T \leq 6)$. R.: 0,0634
   c) Se 4 desses satélites forem lançados no mesmo instante, qual é a probabilidade que após 5 anos todos estejam funcionando? R.: 0,00674
   d) Se 4 desses satélites forem lançados no mesmo instante, qual é a probabilidade que após 5 anos exatamente dois estejam funcionando? R.: 0,2507
5) (Difícil! Optativo) Suponhamos que a duração de vida T, em horas, de determinada válvula eletrônica seja uma v.a. com distribuição exponencial. Uma máquina que emprega esta vávula custa C_1 dólares/hora de funcionamento. Enquanto a máquina está funcionando, um lucro de C_2 dólares/hora é obtido. Um operador deve ser contratado para um número de horas prefixado, H, e recebe um pagamento de C_3 dólares /hora. Para qual valor de H o *lucro esperado* será máximo? Após a obtenção da expressão algébrica do valor de H, considere os seguintes valores para decidir por quantas horas deve ser contratado o operador para que o lucro seja máximo: E(T) = 1/0,01; C_1 = 3; C_2 = 10 e C_3 = 4. R.: $\approx$ 56 horas.

obs.:

a) Apresenta inúmeras aplicações nas áreas da teoria da confiabilidade.
b) $E(X) = 1/\lambda$ e $V(X) = 1/\lambda^2$.

normal

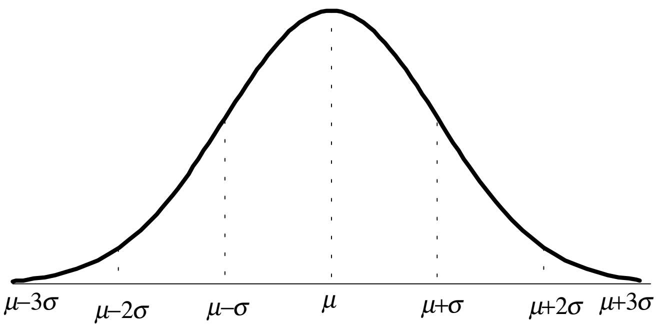
É uma das mais importantes distribuições de probabilidades, sendo aplicada em inúmeros fenômenos e constantemente utilizada para o desenvolvimento teórico da inferência estatística. É também conhecida como distribuição de Gauss, Laplace ou Laplace-Gauss.

Seja X uma v.a.c.. Dizemos que X tem distribuição normal se possuir a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad \text{, para } -\infty < \mu < \infty,\ -\infty < x < \infty \ \text{ e } \ \sigma > 0$$

Notação: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$: X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.

i) Representação gráfica:



$\mu \pm \sigma \rightarrow 68{,}27\%$, $\mu \pm 2\sigma \rightarrow 95{,}45\%$ $\mu \pm 3\sigma. \rightarrow 99{,}73\%$

É um gráfico em forma de sino. O seu posicionamento em relação ao eixo das ordenadas e seu achatamento vai ser determinado pelos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.

A função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\, dx$$

ii) Propriedades:

P_1) f(x) possui um ponto de máximo para $x = \mu$.

P_2) f(x) tem dois pontos de inflexão cujas abscissas valem $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$

P_3) f(x) é simétrica em relação a $x = \mu$. E ainda, μ = Mo = Md.

P_4) f(x) tende a zero quando x tende para $\pm\infty$ (assintótica em relação ao eixo x).

iii) Cálculo de probabilidades:

Para o cálculo da probabilidade da v.a.c. assumir um valor em determinado intervalo, surgem dois problemas:

1º) Integração de f(x), pois para o seu cálculo é necessário o desenvolvimento em séries.

2º) Elaboração de tabelas se torna inviável, pois a f.d.p. depende de dois parâmetros, o que acarretaria a necessidade do estabelecimento de todas as possíveis combinações de valores desses parâmetros.

Estes problemas são resolvidos pela padronização dos valores, obtendo-se assim a distribuição normal padronizada ou reduzida.

Variável Normal Padronizada (Z)

É obtida por meio de uma transformação linear da variável normal X, obtendo-se assim uma escala relativa de valores na qual a média é tomada como ponto de referência e o desvio padrão como medida de afastamento da média:

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ou $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ onde:

z = valor da variável normal padronizada Z
x = valor de X
μ = média de X
σ = desvio padrão de X

Média e Variância da Variável Normal Padronizada:

i) Média:

$$E(Z) = E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}[E(X-\mu)] = \frac{1}{\sigma}[E(X)-E(\mu)]$$

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

ii) Variância:

$$V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\,V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\,[V(X)+V(\mu)]$$

$$V(Z) = \frac{1}{\sigma^2}\,(\sigma^2+0) = 1$$

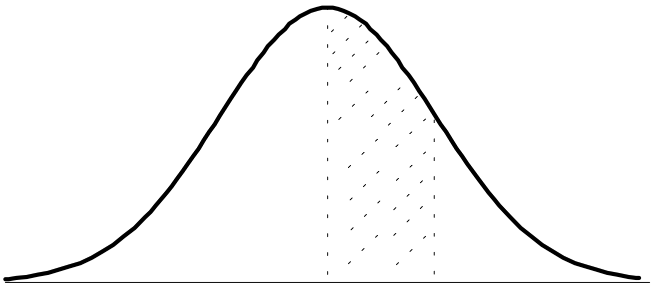
Conclusão: Se X~N(μ, σ^2), e $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, então Z ~N(0,1), para quaisquer valores de μ e σ^2. Portanto, será possível tabelar as probabilidades, $P(X \le x) = P(Z \le z)$, em função dos valores de Z.

A f.d.p. da variável Z é dada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad \text{para } -\infty < z < \infty$$

Tabela da Distribuição Normal Padrão

Há vários tipos de tabelas que nos fornecem as probabilidades sob a curva normal. A tabela que vamos utilizar é aquela que fornece a probabilidade da variável Z assumir um valor entre zero e um particular z_0, ou seja:



$$P(0 \le Z \le z_0) = \int_0^{z_0} \varphi(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_0} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

é a área hachurada sob a curva normal [φ(z)].

Exemplos:

1) Calcule:

a) $P(Z < 1{,}82)$

b) $P(Z \le -2{,}03)$

c) $P(-2{,}55 \le Z \le 1{,}20)$

d) $P(Z \ge 1{,}93)$

R: a) 0,9656 b) 0,0212 c) 0,8795 d) 0,0268

2) Se X~N (100, 25), calcule:

a) $P(X > 110)$

b) $P(95 \le X \le 105)$

c) Encontre x tal que $P(X \le x) = 0{,}3446$

R: a) 0,0228 b) 0,6826 c) 98

Obs.: Teorema da Combinação Linear

A combinação linear de variáveis normais independentes é também uma variável normal. Assim se X e Y são variáveis normais independentes, então W = aX + bY + c é também uma variável normal com média $\mu_W = a\mu_X + b\mu_Y + c$ e variância $\sigma_W^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$, onde a, b e c são constantes.

Em particular, devemos notar que a soma ou subtração de duas ou mais variáveis aleatórias normais, também é uma variável normal.

3. Exercícios Propostos:

1. Um pesquisador decidiu que, para facilitar a classificação das aves em experimentos de nutrição, deve-se dividir as poedeiras, no início da postura, em três grupos de peso equiprováveis, a saber: poedeiras pesadas, poedeiras médias e poedeiras leves.

Encontre os pesos correspondentes à cada classe, sabendo-se que o peso médio das aves nessa idade é 1,5 kg, com desvio padrão de 0,170 kg (supor distribuição normal).

(R: Leves: peso < 1,43 kg; médias: 1,43 ≤ peso ≤ 1,57 kg; pesadas: peso > 1,57 kg)

2. O diâmetro de um cabo elétrico é normalmente distribuído com média 0,8 mm e variância 0,0004 mm^2. Dentre uma amostra de 1000 cabos, quantos esperamos que tenha diâmetro:
a) maior ou igual a 0,81 mm
b) entre 0,73 e 0,86 mm
c) menor que 0,78 mm
(R: a) 308,5 b) 998,7 c) 158,7)

3. Em uma distribuição normal 28% dos elementos são superiores a 34 e 12% dos elementos são inferiores a 19. Encontrar a média e a variância da distribuição.
(R: $\mu \cong 29{,}03$ e $\sigma^2 \cong 73{,}4$)

4. X é uma v.a.c. tal que X~N(12, 25). Qual a probabilidade de uma observação ao acaso ser menor do que -2,5?
(R: 0,0019).

lognormal

Essa distribuição ocorre na prática sempre que se encontrar uma v.a. tal que seu logarítmo tenha uma distribuição normal. Em outras palavras, se uma v.a. X tem distribuição Normal e se os valores de uma v.a. Y estão relacionados a X pela equação $y=e^x$, Y terá distribuição Lognormal.

exemplo:

1) Encontrou-se, num certo processo de "trituração de pedras" que os diâmetros, D, das pedras quebradas seguem aproximadamente uma lei lognormal com média 1,5 cm e desvio padrão 0,3 cm. Qual a porcentagem das pedras:
   a) que excede 2 cm? R.: ≈ 6,2 %
   b) menor do que 1 cm? R.: ≈ 2,6 %

obs.:

a) Exemplos de aplicação: doses críticas em aplicações de drogas; duração de consultas médicas; distribuição de tamanhos de unidades econômicas.

gamma

A v.a. é dita ter uma distribuição Gamma com parâmetros (α, β), $\alpha > 0$, $\beta > 0$, se sua fdp é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & para \quad x \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

onde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

é chamada de função gamma.
Resultados importantes são:

a) $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = ... = (n-1)!$

b) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

exemplo:

1) O tempo de vida de uma bateria tem distribuição exponencial com taxa β. Se um aparelho eletrônico requer uma bateria para funcionar, então o tempo total de funcionamento que podemos obter de um total de n baterias é uma v.a. gamma com parâmetros (n, β). Como proceder para obter a probabilidade do aparelho funcionar por um tempo maior que t ?

obs.:

a) Uma relação pode ser feita entre as distribuições Gama e Poisson. Na de Poisson estamos interessados no número de ocorrências de algum evento durante um período de tempo fixado. A Distribuição Gama, por outro lado, surge quando indagamos a distribuição do tempo necessário para obter um número especificado de ocorrências do evento.

b) Fornece uma representação útil de muitos fenômenos físicos. Fornece um melhor ajuste à distribuição Exponencial na modelagem de tempo de vida de peças. Tem também aplicação em processos meteorológicos, teoria de riscos de seguros e teoria econômica.

c) quando $\alpha = 1$ a distribuição gamma se reduz à distribuição exponencial com media $1/\beta$.

d) essa distribuição surge quando indagamos a distribuição do tempo necessário para obter um número especificado de ocorrências do evento.

Weibull

Essa distribuição provê mais flexibilidade quando a distribuição exponencial parece ser adequada, especialmente quando condições de estrita casualização não são satisfeitas. Ela descreve dados de teste de tempo de duração (vida) e fadiga. Portanto essa distribuição é frequentemente usada para representar a distribuição da força de quebra de materiais em testes de controle de qualidade e confiabilidade.

exemplo:

obs.:

a) A distribuição de Weibull representa um modelo adequado para uma lei de falhas, sempre que o sistema for composto de vários componentes e a falha seja essencialmente devida à “mais grave” imperfeição ou irregularidade dentre um grande número de imperceições do sistema;

b) Empregando uma distribuição de Weibull, poderemos obter tanto uma taxa de falhas crescente como uma decrescente, pela simples escolha apropriada do parâmero

beta

O gráfico representativo dessa distribuição revela muitas das suas propriedades à medida que os parâmetros variam.

exemplo:

obs.:
a) Essa distribuição é amplamente utilizada para ajustar distribuições teóricas cujas amplitudes de variação são conhecidas. O ajuste é realizado após equacionar o primeiro e segundo momentos (esperança e variância, respectivamente) das curvas teórica e ajustada.

χ^2

A distribuição de Qui-quadrado possui numerosas aplicações importantes em inferência estatística. Essa distribuição aparece naturalmente na teoria associada com a distribuição da soma dos quadrados de variáveis normais-padrão independentes. Dada a sua importância, tal distribuição está tabulada para diferentes valores do parâmetro v.

exemplo:
aplicação em testes de hipóteses e como aproximação para distribuições de algumas funções de variáveis aleatórias

obs.:

a) Essa distribuição é usada primariamente como uma aproximação para a estatística χ^2 (a ser vista oportunamente) sendo esta muito importante para vários testes de significância.

F

Essa distribuição tem importância na teoria estatística principalmente pela sua aplicação na distribuição de razões de variâncias. Sua aplicação mais comum é, ortanto, em testes associados com a análise de variância (ANOVA, a ser discutido em Estatística Experimental), quando a homogeneidade de um conjunto de médias é testado. No nosso curso utilizaremos essa distribuição para testar a igualdade de variâncias advindas de duas populações normais.

exemplo:
aplicação em testes de hipóteses

obs.: