CAPÍTULO 1 - Conceitos introdutórios

Conceitos de estatística, população e amostra.

(V.M.11) Estatística é uma área da ciência ligada com a extração de informação de dados numéricos e a sua utilização na tomada de decisões (estabelecimento de inferências) sobre uma população da qual os dados foram obtidos.

(M.G.1)Estatística corresponde ao campo da ciência que trata da coleção, apresentação, análise e uso de dados numéricos para a tomada de decisões e solução de problemas.

De modo geral podemos definir **população** como sendo o conjunto de elementos que têm, em comum, determinada característica. As populações podem ser finitas ou infinitas. Além disso existem populações que, embora finitas, são consideradas infinitas para qualquer finalidade prática.

Entende-se por **amostra** qualquer conjunto de elementos retirado da população, desde que esse conjunto seja não-vazio e tenha menor número de elementos do que a população.

Por exemplo, na predição da fração de fumantes que preferem a marca de cigarros "fumacê" nós assumimos que aqueles que forem entrevistados costituem uma amostra representativa da população de todos os fumantes (que apesar de numericamente ser uma população finita, pode ser considerada infinita para efeitos práticos).

Como um outro exemplo considere o problema de determinar a efetividade de proteção contra ferrugem de um certo tipo de tinta. Para simplificar suponhamos que 20 máquinas que trabalham nas mesmas condições foram pintadas e após um certo período de tempo verificou-se que 16 delas conservam-se intactas (ainda protegidas). Quer-se saber se essa tinta protege realmente as máquinas. Nesse caso a amostra consiste de 20 máquinas. Qual seria a população?

O que seria, então, de interesse primário? a amostra ou a população?

Nos exemplos citados acima nós estamos primordialmente interessados na população. Na maioria dos casos seria impossível obtermos todos os dados de interesse da população. Portanto, a amostra pode ser de interesse imediato, mas estamos primordialmente interessados em descrever a população da qual a amostra foi extraída.

Por que estudar estatística?

Qualquer um, tanto na carreira profissional quanto na vida diária através do contato com jornais, televisão, e outros meios de divulgação de informações se deparam com informações na forma de dados numéricos.

Possíveis razões para o estudo da Estatística:

- Atualização
  para facilitar o entendimento de artigos em revistas especializadas, que utilizam muito a estatística para a apresentação e interpretação dos resultados.
- Desenvolvimento de trabalhos
  É de fundamental importância para o auxílio no desenvolvimento de trabalhos científicos e posteriores conclusões.

obs.: para quem tiver interesse no desenvolvimento de trabalhos de iniciação científica, ou mesmo, mais tarde, para quem pretender realizar um curso de pós-graduação. (podem ter certeza que farão, no mínimo, mais uma estatística na pós-graduação).

O uso da estatística.

Já que engenheiros e demais cientistas frequentemente se vêem obtendo e analizando dados, o conhecimento de estatística é especialmente importante nesses campos da ciência. Poderíamos dizer que o conhecimento de estatística e probabilidade pode ser uma ferramenta poderosa para ajudar esses profissionais na idealização de novos produtos e sistemas, melhorando idéias já existentes e idealizando, desenvolvendo e melhorando processos de produção.

O presente material (curso) visa equipar voçês, futuros engenheiros e cientistas, com as ferramentas estatísticas básicas para praticar, com sucesso, esses aspectos em suas profissões.

No texto, nossa atenção estará voltada em grande parte para aplicações nas áreas dos estudantes desse curso, porém não hesitaremos em referir-nos também a outras áreas, de modo que o leitor poderá observar a grande generalidade da maioria das técnicas estatísticas. Por exemplo:

- O método estatístico usado para estimar a tensão de ruptura ou o coeficiente de dilatação térmica de um metal serve também para estimar o tempo médio que leva uma secretária para executar uma tarefa ou a média do Q.I. (quociente de inteligêcia) dos alunos que pretendem ingressar em algum curso da UFV.
- O método estatístico que é usado para comparar o trabalho de duas máquinas serve para comparar também a efetividade de dois processos de ensino, o mérito de dois fertilizantes ou a audiência de dois programas de rádio.

Há, no entanto, ocasiões onde as exigências dos diferentes campos tem obrigado o desenvolvimento de técnicas estatísticas especiais. Dessa forma o problema de previsão econômica nos leva à métodos especiais usados na análise de séries de dados dos negócios; problemas de testes de Psicologia (testes não paramétricos) nos levam à análise dos fatores e assim por diante.

No campo da engenharia, por exemplo, podemos destacar o problema do controle de qualidade que exige métodos especiais, ocorrendo o mesmo no desenvolvimento da teoria da confiabilidade.

Tópico Especial

Somatório e produtório

1. SOMATÓRIO

1.1. Introdução

Muitos dos processos estatísticos exigem o cálculo da soma. Para simplificar a representação da operação de adição nas expressões algébricas, utiliza-se a notação Σ, letra grega sigma maiúsculo.

As principais representações são:

1) $\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, soma simples

2) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, soma de quadrados (SQ)

3) $(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2$, quadrado da soma

4) $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n$, soma de produtos (SP)

5) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{m} Y_j = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n).(Y_1 + Y_2 + ... + Y_m)$, produto das somas

Lê-se $\sum_{i=1}^{n} X_i$ como: somatório de X índice i, com i variando de 1 até n, onde:

n, é a ordem da última parcela ou limite superior (LS) do somatório;
i=1, é a ordem da primeira parcela da soma ou limite inferior do somatório (LI);
i, é o índice que está indexando os valores da variável X (outras letras como j, l, k podem ser utilizadas).

Exemplo:
Considere as variáveis X e Y que representam, respectivamente, as notas de duas disciplinas, para um grupo de 6 alunos.

X = {90, 95, 97, 98, 100, 60}
Y = {60, 70, 80, 60, 90, 75}

Verifique se os seguintes somatórios fornecem as respostas conforme apresentado.

a) $\sum_{i=1}^{6} X_i = 540$ b) $\sum_{i=1}^{6} X_i^2 = 49738$ c) $\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\right)^2 = 291600$

d) $\sum_{i=1}^{6} X_i Y_i = 39190$ e) $\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{6} Y_i\right) = 234900$

1.2. Número de Termos (Parcelas) do Somatório (NT)

O número de termos ou parcelas de um somatório (NT) pode ser obtido por:

$$NT = (LS - LI) + 1 - r,$$

onde r é o número de restrições a que o somatório está sujeito.

Exemplos: Obter o número de termos para os seguintes somatórios:

a) $\sum_{i=3}^{8} X_i$, NT = (8-3) + 1 = 6

b) $\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 9,11}}^{15} Y_k$, NT = (15 - 1) + 1 - 2 = 13

1.3. Propriedades de Somatório

As propriedades facilitam o desenvolvimento das expressões algébricas com a notação do somatório. O objetivo é desenvolver as expressões até chegar às somas simples e/ou somas de quadrados.

P.1. <u>Somatório de uma constante k</u>

O somatório de uma constante é igual ao produto do número de termos pela constante.

$$\sum_{i=1}^{n} k = k + k + ... + k = nk$$

Exemplos:

a) $\sum_{i=1}^{10} 5 = [(10 - 1) + 1](5) = 10(5) = 50$

b) $\sum_{i=3}^{12} Y_j = [(12 -3) + 1]\ Y_j = 10\,Y_j$

P.2. Somatório do produto de uma constante por uma variável

O somatório do produto de uma constante por uma variável é igual ao produto da constante pelo somatório da variável.

$$\sum_{i=1}^{n} kX_i = kX_1 + kX_2 + \ldots + kX_n = k(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = k\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Exemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \,,\; k = \frac{1}{2}$$

P.3. Somatório de uma soma ou subtração de variáveis

O somatório de uma soma ou subtração de variáveis é igual à soma ou subtração dos somatórios dessas variáveis.

Sem perda de generalidade, para três variáveis X, Y e W, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i - W_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} W_i$$

1.4. Somatório Duplo (opcional para o momento. Será discutido oportunamente)

Considere a Tabela a seguir:

	1	2	...	j	...	s	
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1s}	$\sum_{j=1}^{s} X_{1j}$
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2s}	$\sum_{j=1}^{s} X_{2j}$
...	...	...	...	...	...	...	...
i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij}	...	X_{is}	$\sum_{j=1}^{s} X_{ij}$
...	...	...	...	...	...	...	...
r	X_{r1}	X_{r2}	...	X_{rj}	...	X_{rs}	$\sum_{j=1}^{s} X_{rj}$
	$\sum_{i=1}^{r} X_{i1}$	$\sum_{i=1}^{r} X_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{r} X_{ij}$	...	$\sum_{i=1}^{r} X_{is}$	G

$X_{ij} \rightarrow$ i = 1,2, ..., r (índice de linha)

j = 1,2, ..., r (índice de coluna).

G = total geral

$$G = \sum_{i=1}^{r} X_{i1} + \sum_{i=1}^{r} X_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{r} X_{ij} + \ldots + \sum_{i=1}^{r} X_{is}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{ij} + \ldots + X_{is} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} X_{ij} = \sum_{i=1, j=1}^{r,s} X_{ij} = X.. \quad , \quad \text{ou ainda} \quad G = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} X_{ij} = \sum_{j=1, i=1}^{s,r} X_{ij} = X..$$

Total da i-ésima linha: $\sum_{j=1}^{s} X_{ij} = X_{i.}$

Total da j-ésima coluna: $\sum_{i=1}^{r} X_{ij} = X_{.j}$

1.5. Exercícios Propostos

1) Considerando os seguintes valores:

$X_1 = 2$ $\quad X_2 = 6$ $\quad X_3 = 7$ $\quad X_4 = 9$

$Y_1 = 1$ $\quad Y_2 = 4$ $\quad Y_3 = 5$ $\quad Y_4 = 11$

Calcular:

a) $\sum_{i=1}^{3} (Y_i - 2)^2$

b) $\sum_{i=1}^{4} (X_i - 4Y_i)$

c) (opcional) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{4} (X_i + 2)$

d) (opcional) $\sum_{i=2}^{4} \sum_{j=2}^{3} 3(X_i - Y_j)$

R: a) 14 b) -60 c) 63 d) 51

2) Efetuar

a) $\sum_{i=-1}^{3} (i^2 + \frac{1}{j})$

b) (opcional) $\sum_{i=3}^{6} \sum_{j=0}^{2} (i + j) . (\frac{i - 3}{i})$

R: a) 5(3 + 1/j) b) 429/20

3) Calcule X_1 e X_3 , dado que:

$$\sum_{i=1}^{6} X_i = 42 \qquad \sum_{i=1}^{6} X_i^2 = 364$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1,3}}^{6} X_i = 34 \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1,3}}^{6} X_i^2 = 324$$

R: $X_1 = 2$ e $X_3 = 6$ ou $X_1 = 6$ e $X_3 = 2$.

4) Calcular: (opcional)

a) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{4}(i + j)$ b) $\sum_{j=5}^{9}\sum_{i=1}^{6} i \cdot j$

a) 90 b) 735

2. PRODUTÓRIO

2.1. Introdução

O símbolo produtório é utilizado para facilitar a representação dos produtos.
Utiliza-se a notação $\prod$, letra grega pi maiúsculo.

Representação: $\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 . X_2 . \ldots . X_n$

Fatos:

1) $b_1 . b_2 . \ldots . b_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$

2) $\underbrace{b . b . b . \ldots . b}_{n \text{ fatores}} = \prod_{i=1}^{n} b = b^n$

3) $\prod_{i=1}^{n} cX_i = cX_1 . cX_2 . \ldots . cX_n = c^n . X_1 . X_2 . \ldots . X_n = c^n \prod_{i=1}^{n} X_i$

4)

$$\prod_{i=1}^{n} X_i Y_i = X_1Y_1 . X_2Y_2 . \ldots X_nY_n = (X_1 . X_2 . \ldots X_n)(Y_1 . Y_2 . \ldots Y_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

5) $\prod_{i=1}^{n} i = 1.2.3.\ldots.n = n!$

6) $\log \prod_{i=1}^{n} X_i = \log(X_1.X_2\ldots X_n) = \log X_1 + \log X_2 + \ldots + \log X_n = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$

2.2. Exemplo:

Sabendo-se que:

$X_1 = 2 \quad X_2 = 3 \quad X_3 = 5$
$Y_1 = 3 \quad Y_2 = 5 \quad Y_3 = 7$

Calcular:

a) $\prod_{i=1}^{3} X_i = X_1.X_2.X_3 = 2.3.5 = 30$

b) $\prod_{i=1}^{3} Y_i = Y_1.Y_2.Y_3 = 3.5.7 = 105$

c) $\prod_{i=1}^{3} 3.X_i = 3^3 \prod_{i=1}^{3} X_i = 27\ (30) = 810$

d) $\prod_{i=1}^{3} X_i.Y_i = \left(\prod_{i=1}^{3} X_i\right).\left(\prod_{i=1}^{3} Y_i\right) = (30)\ (105) = 3150.$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Seja uma variável X, assumindo os seguintes valores:

X = {5, 2, 3, 0, 1, 2, 6, 9, 4, 8} n=10

Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{10} X_i$ b) $\sum_{i=1}^{10} X_i^2$ c) $\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2$ d) $\dfrac{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2}{10}}{10-1}$

e) $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)$ f) $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$ g) $\dfrac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2}{10-1}$ h) $\dfrac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$

2) Sabendo-se que $\sum_{i=1}^{5} X_i = -6$ e $\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = 12$, calcule:

a) $\sum_{i=1}^{5} (4X_i + 5)$ b) $\sum_{i=1}^{5} X_i (X_i - 2)$ c) $\sum_{i=1}^{5} (X_i - 3)^2$

3) Desenvolver e calcular: (opcional)

a) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{6} (i + b_j)$ b) $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{5} (i - j)$ c) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{2} (i + 3j)^2$

d) $\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=0}^{8} c\,b$ e) $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} i^2$

4) Utilizando os dados da Tabela abaixo, calcule:

i \ j	1	2	3	4
1	8	7	5	9
2	4	0	10	2

a) $\sum_{i=1}^{2} X_{i1}$ b) $\sum_{j=1}^{4} X_{1j}$ c) (opcional) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} X_{ij}$ d) $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^{4} X_{ij}$

e) $\sum_{j=2}^{3} X_{2j}$ f) $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{4} \frac{1}{X_{2j}}$ g) $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^{4} 6X_{1j}$ h) $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{4} X_{2j}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
--Departamento de Informática/CCE
INF 161 - Iniciação à Estatística; INF 162 – Estatítica I
Lista de Exercícios: Somatório e Produtório

1) Escrever usando notação de somatório ou produtório, conforme o caso:

a) $\left(\frac{X_1 - Y_1}{2} + \frac{X_2 - Y_2}{2} + \frac{X_4 - Y_4}{2}\right)^2$

b) $a!$

c) $(X_1 + Y_1)(X_1 + Y_2)(X_1 + Y_3)$

d) $(X_1Y_1) + (X_1Y_2) + (X_1Y_3) + (X_2Y_1) + (X_2Y_2) + (X_2Y_3)$

e) $(X_1Y_1)\cdot(X_2Y_2)\cdot\cdots\cdot(X_nY_n)$

2) Considere os seguintes valores:

$X_1 = 2$	$X_2 = 4$	$X_3 = 6$	$X_4 = 8$	$X_5 = 10$	$X_6 = 12$	$X_7 = 14$	$X_8 = 16$
$Y_1 = 1$	$Y_2 = 3$	$Y_3 = 5$	$Y_4 = 7$	$Y_5 = 9$	$Y_6 = 11$	$Y_7 = 13$	$Y_8 = 15$

Calcule os seguintes somatórios e produtórios:

a) (opcional) $\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=2}^{5}(X_i - 3)$ b) $\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{X_i}{2} - Y_i\right)^2$ c) $\sqrt{\prod_{i=1}^{4} X_i}$ d) $\prod_{i=2}^{4}\frac{X_iY_i}{3}$

3) Desenvolver:

a) $\sum_{i=-1}^{3}\left(i^2 + \frac{1}{j}\right)$ b) (opcional) $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 4}}^{5}\sum_{i=2}^{4}\frac{(i^2 - j^2)j}{i+j}$

c) $\left[\sum_{i=1}^{5}(i+8)\right]^2$ d) $\prod_{i=1}^{5}(i+8)$

4) Se $\sum_{i=1}^{3} X_i = 12$ $\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = 56$ e $Y_1 = 3$ $Y_2 = 5$ $Y_3 = 6$, calcule:

a) $\sum_{i=1}^{3} 9$ b) $\sum_{i=1}^{3} 12X_i$ c) $\sum_{i=1}^{3}\left(X_i^2 - 2\right)$ d) $\sum_{i=1}^{3}(X_i\, Y_i)$

5) Se $X_1 = 2 \quad X_2 = 4 \quad X_3 = 6 \quad \text{e} \quad Y_1 = 3 \quad Y_2 = 5 \quad Y_3 = 6$, calcule:

a) $\sum_{i=1}^{3} (X_i \; Y_i)$

b) $\sum_{i=1}^{3} (X_i - 2)(Y_i - 5)$

6) Calcule X_9 e X_{21}, sabendo-se que:

$$\sum_{i=1}^{50} X_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{50} X_i^2 = 1206 \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 9 \text{ e } 21}}^{50} X_i = 190 \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 9 \text{ e } 21}}^{50} X_i^2 = 1154$$

7) Dados:

i	Y_i	X_i
1	3	10
2	5	11
3	9	15
4	10	19
5	2	21
6	1	26

Calcule as seguintes quantidades:

a) $\sum_{i=1}^{6} X_i$

b) $\sum_{i=1}^{6} f_i$

c) $\sum_{i=1}^{6} f_i \; X_i^2$

d) $\dfrac{\sum_{i=1}^{6} f_i \; X_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i}$

8) Sabendo-se que:

$$X_1 = 3, \quad X_2 = 4, \quad X_3 = 8, \quad X_4 = 7, \quad X_5 = 6$$
$$Y_1 = 3, \quad Y_2 = 8, \quad Y_3 = 2, \quad Y_4 = 5, \quad Y_5 = 6$$

Calcule:

a) $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{5} X_i$

b) $\sum_{i=1}^{5} 4X_i$

c) $\sum_{i=3}^{5} (X_i + 6)$

d) $\sum_{i=2}^{4} (2X_i - 3)$

e) $\sum_{i=1}^{5} X_i \; Y_i$

f) $\sum_{i=1}^{5} (X_i + Y_i)$

RESPOSTAS

2) a) 192 b) 140 c) 19,59 d) 746,66

3) a) $5\left(3+\frac{1}{j}\right)$ b) -18 c) 3025 d) 154440

4) a) 27 b) 144 c) 50 d) Não é possível

5) a) 62 b) 4

6) 4 e 6

7) a) 102 b) 30 c) 8098 d) 15,93

8) a) 24 b) 112 c) 39 d) 29

e) 128 f) 52